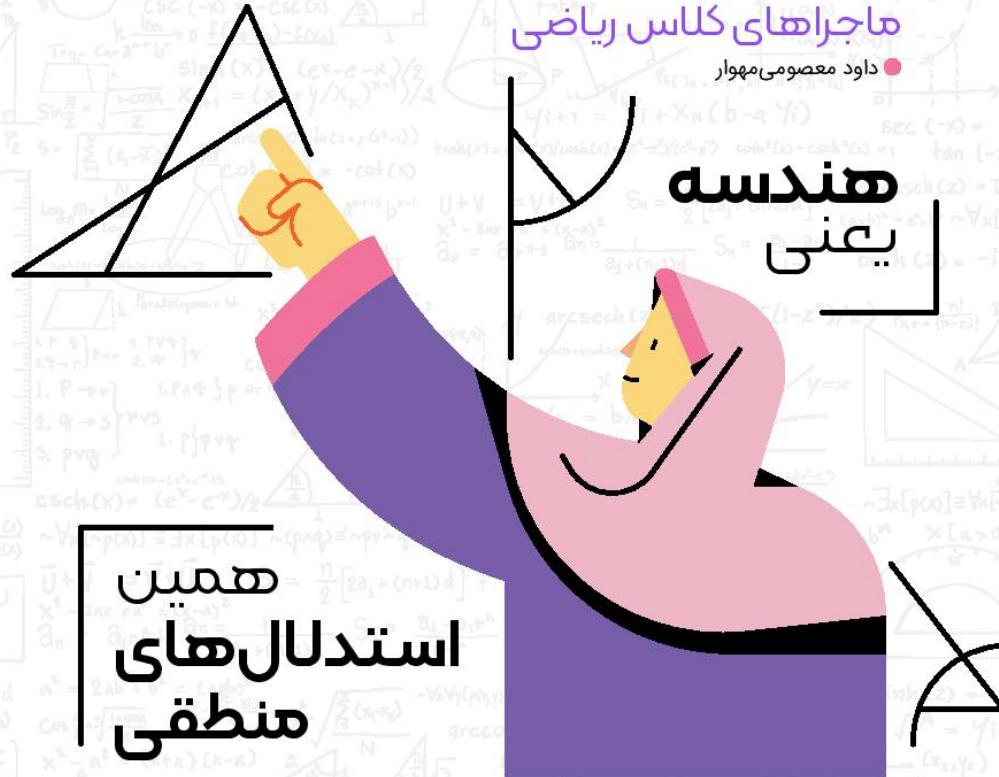


ماجرای کلاس ریاضی

داود معصومی مهوار

هندسه یعنی



همین استدلال‌های منطقی

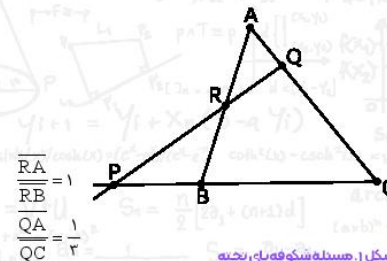
شکوفه: در شکل ۱ تقطه Q ضلع AC از مثلث ABC را از سوی A به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. یعنی QC سه برابر QA طول دارد. تقطه R نیز وسط ضلع AB است و بالاخره خط QR یا خط BC در تقطه P برخورد کرده است. ما باید چند جفت مثلث نام ببریم که نسبت مساحت‌هایشان را بدانیم...

سراغ دو مثلث AQR و CQR می‌روم. مساحت هر مثلث برابر است یا نصف حاصل ضرب طول یک ضلع در طول ارتفاع وارد بر همان ضلع. برای محاسبه مساحت دو مثلث، به دو ضلع در یک امتداد، یعنی QA و QC توجه می‌کنیم. پس داریم:

$$\frac{S_{\triangle AQR}}{S_{\triangle CQR}} = \frac{QA \times RQ \times \frac{1}{2}}{QC \times RQ \times \frac{1}{2}} = \frac{QA}{QC} = \frac{1}{3}$$

و به دلایلی مشابه، نسبت مساحت‌های دو مثلث PQA و PQC و نیز دو مثلث BQA و BQC هم ۱ به ۳ است.

بروانه: فکر می‌کنم استدلال شکوفه کمی ایراد دارد. او برای



من: شکوفه، شکلی که پای تخته کشیدی بد نیست، ولی می‌خواهم پشت به تخته و رو به بچه‌ها و از روی شکلی که در ذهنت داری، راحت را بگویی و البته پیش از هر کاری صورت مسئله را برایمان بگویی.

من: خب دقت کن. تو هم هیچ دلیلی نداری. داری یا چشم خودت قضاوت می کنی و از من می خواهی که من هم چنین کنم. نه او برای عمود بودن دلیل دارد و تو نه برای عمود نبودن یا چشم قضاوت می کنی. اصلاً ممکن است کسی بگوید که در همه شکل هایی که کشیده اید، PQR را عمود بر AC می بیند و اگر شما نمی بینید، خطای دید دارید این کار شما در ریاضی و هندسه پذیرفته نیست. با این طرز استدلال، اصلاً جایی برای مباحثه یا ریاضی دانی تالیفا می گذارید؟ کوتاه بیایید. فکر کنید و واقعاً استدلال کنید. منتظرم.

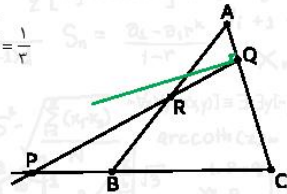
اعظم: از همان اول زاویه A را زاویه ای باز می کشم. در این صورت در مثلث AQR دیگر نمی تواند زاویه قائمه ای وجود داشته باشد.

ترگس: شبیه اعظم کار کنیم. اگر خود زاویه A را قائمه بگیریم، دیگر کسی نمی تواند ادعا کند که زاویه RQA قائمه است. زیرا از یک نقطه نمی توان دو عمود متمایز بر یک خط کشید.

الهام: می توانیم ابتدا ضلع AC را بکشیم و Q را مشخص کنیم و خودمان خطی را در Q بر AC عمود کنیم. سپس نقطه R را جوری بگیریم که روی این خط عمود نباشد و AR را به اندازه خودش تا نقطه B ادامه دهیم و شکل را کامل کنیم (شکل ۳). الان روشن است که زاویه RQA قائمه نیست و داریم:

$$\frac{RA}{RB} = 1$$

$$\frac{QA}{QC} = \frac{1}{3}$$



شکل ۳. مثال نصح الهام

من: این شد استدلال و مثال تقض. هر سه درست می گویند. اگر کسی حرف هر کدامتان را بشنود، باید قبول کند. تیزی به دین و قضاوت یا چشم هم ندارد. هندسه یعنی همین. از طرف دیگر توجه کنید که استدلال الهام از همه بهتر بود. او خیلی ساده و مقدماتی کار را راه انداخت. در صورتی که برای تأیید حرف های ترگس باید به این قضیه تکیه کنیم که: «از یک نقطه بیرون خط نمی توان دو عمود بر آن خط کشید.» و برای تأیید حرف اعظم هم مثلاً باید به این قضیه تکیه کنیم که: «مجموع زاویه های درونی هر مثلث برابر با ۱۸۰ درجه است.»

ولی می بینید که مثال تقض الهام به قضیه ای نیاز ندارد. از همین رو مقدماتی تر و بهتر است. امروز هم چیز خوبی یاد گرفتید. حرف ها باید مستند و مستدل باشند. هیچ شکلی که با ابزار کشیده شود، دقیق و مستند نیست. الان متوجه شدید برای چه از شکوفه خواستیم که شکلی را نگاه کند و رو به شما استدلالش را بیان کند. شما هم باید به استدلال توجه و قضاوت کنید نه به شکل.

محاسبه مساحت باید ارتفاع وارد بر AC را می کشید، ولی بی هیچ دلیلی ادعا کرد که خود خط PQR بر خط AC عمود است. شاید در بعضی شکل ها چنین باشد، ولی نباید فرض کنیم که همیشه چنین چیزی رخ می دهد.

من: خب همه کمی فکر کنند تا پس از یک دقیقه دیدگاه هایتان را بکشیم.

زهرا: خب اینکه فکر نمی خواهید شکوفه به روشنی اشتباه کرده و تقد پروانه کلاً درست است.

یا اشاره من زهرا قبول کرد که سکوت کند.

زهرا (پس از یک دقیقه): من هنوز همان نظر را دارم. بعید می دانم خبر دیگری باشد.

من (در حالی که دستم را بالا برده بودم): خب کسانی که تقد پروانه را درست نمی دانند، دستشان را بالا ببرند.

شکوفه (تنها کسی که دستش بالا بود): فکر می کنم این شکل واقعاً یک شکل خاص است. تقصیر من نیست که خط PQR

بر AC عمود شده است. چون خط PQR یک خط دلخواه نیست. ویژگی هایی دارد که باعث شده است بر AC عمود شود.

همین که بنا بر فرضیه های مسئله این خط باید AB و AC را به نسبت های معینی تقسیم کند، باعث شده است تا این خط

بر AC عمود شود.

لیلا: خب اگر هم این ادعای جدید شکوفه درست باشد، نیاز به دلیل دارد. چرا باید بی دلیل از او بپذیریم که PQR بر AC

عمود است؟

من: اعتراف می کنم که تو راست می گویی و او دلیلی نیاورده است. ولی آیا شما مخلفان هم می پذیرید که بی هیچ دلیلی یا

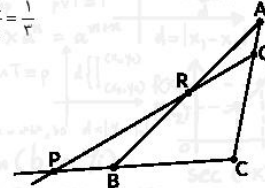
او مخلفت می کنید؟

زهرا: من یک شکل دیگر می کشم که در آن PQR بر AC عمود نباشد (شکل ۲).

$$\frac{RA}{RB} = 1$$

$$\frac{QA}{QC} = \frac{1}{3}$$

شکل ۲. مثال نصح زهرا



خب با این مثال تقض الان باید بپذیرید که بی دلیل نمی گویم. من: شکوفه کوتاه آمد، ولی من هنوز طرفدار او هستم. مثال تقض یک دلیل قوی و درست است، ولی به نظرم زهر اصلاً مثال تقضی نیاورده است. این جور که من می بینم، او هم مثل شکوفه کار کرده است. یک شکل کشیده است و ادعا دارد که این شکل آن طور است که خودش ادعا می کند. هیچ دلیلی هم ندارد! نفیسه (با حمایت خیلی ها): واقعاً حرف ما را با حرف شکوفه یکسان می بینید؟ ما ۱۰ هزار تا شکل دیگر در تأیید حرف خودمان می توانیم بکشیم، در حالی که او به سختی می تواند شکلی شبیه به همین شکلی پیدا کند.